742. 確率法則ノ分解問題, IV

北川　敏男（阪大）

吾々ハ，愈々 K ノ構造ニ関スル Khintchine ノ基本定理（I, §3, 定理 1）ノ証明ニ移ラウ。念ノタメ，問題ノ定理ヲ再記スル：

定理 1. (Khintchine)　凡ベテノ確率法則 $\mathcal{L}$ ハ必ズ次ノ形ニ表ハシ得ル：$\mathcal{L} = \mathcal{L}'\mathcal{L}''$，但シ，茲ニ $\mathcal{L}'$ ハ分解不可能ナ確率法則ノ有限個又ハ無限個ノ積デ，$\mathcal{L}''$ ハ無限ニ分解不可能ナ成ル確率法則ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明トシテ、現在二通リノ方法が知ラレテ居ル。Khintchine ノ方法[1]ハ，無限ニ分解可能ヲ定義

---

(1) 前回引用セシ論文. Lévy ノモ亦然リ。

1（II参照）ニ依ツテ定義シテ，定理1ヲ証明シテ居リ、コレニ反シテ Lévy ノ方法デハ，無限ニ分解可能ノ定義ヲI，§3ノ意味ニトツテ進ムノデアル。

コレ等ニ定義ガ同等デアルコトハ，II ノ結果（定理2）カラモ明ラカデアルカラ、結局同じコトヲ示シタ事ニナルノハ言フマデモナイガ，証明ノ難易ト云フ点カラミルト，Lévy ノ方ガズット簡単デアル。即チ定理1ニ関シテハ無限ニ分解可能ニ関スル Lévy ノ定義ガ Khintchine ノ定義ヨリモ適切デアルトモ云ヘル。（ソノ代リ定理2ノ証明デハ，Khintchine ノ方ガズット簡潔デアル）故ニハ先ヅ Lévy ノ証明ヲ紹介シ（§6）、Khintchine ノ方ハ，方針ノ説明ニ止メヨウ。（§7）

§6.1. $\zeta(\mathcal{L})$, $\eta(\mathcal{L})$ ノ導入　定理1ハ見方ニ依ツテハ，evident ナ様ナ氣モスル。$\mathcal{L}$ ガ無限ニ分解可能ナ確率法則デアレバヨシ，然ラザレバ必ズ分解不可能ナ因子ヲ含ムトイフコトヲ示シテ、ダンダンニなし崩シニシテ行ケバ宜カラウトハ誰レモ想像スルトコロデアロウ。実際ニハ多少工夫ヲ要スル。以上ノ考ヘヲ遂行シテ証明ヲ完成スルタメ、Lévy ハ $\zeta(\mathcal{L})$, $\eta(\mathcal{L})$ ナルモノヲ導入シタ。

（1）$\zeta(\mathcal{L})$ ニ関シテ：　確率法則 $\mathcal{L}$ ガ與ヘラレタトスル。L ヲバ $\mathcal{L}$ ノ素因子ナリトスル；即チ（i）$\mathcal{L} = L\mathcal{L}'$ トナルヤウナ確率法則 $\mathcal{L}'$ ガ存在シ，且（ii）L ハ単位法則（§2）デナク、且ツ分解不可能デアルトスル。

$\mathcal{L}$ ノアラユル素因子 L ニツイテノ平均散縮度 $\delta(L)$ (§1) ノ上限ヲバ $\zeta(\mathcal{L})$ デ表ハスノデアル。即チ、$\mathcal{L}$ ノアラユル素因子ノ集合ヲ $p(\mathcal{L})$ デ表ハストキ，$p(\mathcal{L})$ ガ空集合デナイトキニハ

$$(22)\qquad \zeta(\mathcal{L}) = \underset{L \in p(\mathcal{L})}{u.\ b.}\ \delta(L)$$

デ定義スル。$p(\mathcal{L})$ ガ空集合ナラバ，$\zeta(\mathcal{L}) = 0$ ト定義スル。

明カニ，$\zeta(\mathcal{L}) \geq 0$ デアル．$\zeta(\mathcal{L}) = 0$ ナルコトガ，$p(\mathcal{L})$ ガ空集合ニナルタメノ必充條件トナル。

〔2〕 $\eta(\mathcal{L})$ ニ関シテ： $\mathcal{L}$ ノ分解 $d: \mathcal{L} = \prod_{n=1}^{s_d} \mathcal{L}_n$ ヲ考ヘル。s_d ハ有限デモ，無限デモヨイ。$\overline{\delta}(d)$ ハ，$\delta(\mathcal{L}_n)$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots, s_d)$ ノ上限ヲ意味スルトスル。I，§2，(5)，1° ヲ参照スレバ，コノ上限ハ，何處カノ n デ到達出来ル譯デアルカラ。

$$(23)\qquad \overline{\delta}(d) = \underset{1 \leq n \leq s_d}{u.\ b.}\ \delta(\mathcal{L}_n) = \underset{1 \leq n \leq s_d}{Max}\ \delta(\mathcal{L}_n)$$

(茲ニ，各 $\mathcal{L}_n$ ハ分解不可能トハ限ッテ居ナイコトニ注意セラレタイ。)

次ニ，上述ノ如キ $\mathcal{L}$ ノスベテノ分解ノ集合ヲ考ヘル，コレヲ $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ デ表ハサウ。$\eta(\mathcal{L})$ ハ，コノトキ，次ノ如ク定義サレル：

$$(24)\qquad \eta(\mathcal{L}) = \underset{d \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})}{l.\ b.}\ \overline{\delta}(d)$$

コノ定義カラ明ラカニ、次ノコトガ見ラレル[2]（簡単デアルカラ証明ハ略スル）：

$$(25)\begin{cases}(\alpha) & \mathfrak{L}\text{ ガ}\underline{\text{無限ニ分解可能}}\text{デアルタメノ必充條件ハ} \\ & \quad \eta(\mathfrak{L})=0. \\ (\beta) & \mathfrak{L}\text{ ガ}\underline{\text{分解不可能}}\text{デアルタメノ必充條件ハ} \\ & \quad \delta(\mathfrak{L})=\eta(\mathfrak{L}). \\ (\gamma) & \text{一般ニ}\quad 0\leqq\eta(\mathfrak{L})\leqq\delta(\mathfrak{L}).\end{cases}$$

§6.2. <u>補助定理6</u>. $\eta(\mathfrak{L})>0$ ナラバ，次ノ様ナ分解不可能ナ $\mathfrak{M}$ ガ存在スル： (i) $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ素因子デアル； 且ツ (ii) $\delta(\mathfrak{M})\geqq\eta(\mathfrak{L})$.

<u>注意</u>： (25), (α) ヲ参照スレバ： $\mathfrak{L}$ ガ「無限ニ分解可能ナ確率法則」デナケレバ，$\mathfrak{L}$ ヲ分解スルヤウナ素因子 $\mathfrak{M}$ ガ存在スルトイフコトガ、コノ補助定理カラ得ラレル。コレハ面白イ結果トイフベキデアル。但シ、無限ニ分解可能ナ確率法則ニシテ、素因子ヲ有スルモノハ存在スル（§5，例4）カラ逆ハ成立セヌ。

<u>補助定理6ノ証明</u>： 正数列 $\{\varepsilon_n\}$, $(\varepsilon_n\downarrow 0)$ $(n=1,2,\text{------})$ ガ任意ニ與ヘラレタトスル。コレニ關シテ、次ノヤウナ確率法則ノ系列 $\mathfrak{L}_0,\mathfrak{L}_1,\text{-----},\mathfrak{L}_n$ ガ定義出

---

(2) (α) ハ定義カラ明ラカデアル。（I, §3 参照）

(β)： $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\text{-----}\mathfrak{L}_n$ トナレバ必ズ $\delta(\mathfrak{L}_i)<\delta(\mathfrak{L})$ $(i=1,2,\text{-----},n)$（但シ勿論各 $\mathfrak{L}_i$ ハ単位法則デナイトスル）コレカラ (β) ガ得ラレル。

(γ) ハ以上ニヨリ明ラカ。

求タトスル：

$$(26)\begin{cases}\text{(i)} & \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L} \\ \text{(ii)} & \mathfrak{L}_s \text{ ハ } \mathfrak{L}_{s-1} \text{ ノ分解因子ヲナシ，且ツ，} s=1, \\ & 2,\cdots\cdots, n \text{ ニ對シテ} \\ & \eta(\mathfrak{L}_{s-1}) \leqq \eta(\mathfrak{L}_s) \leqq \delta(\mathfrak{L}_s) \leqq \eta(\mathfrak{L}_{s-1})+\varepsilon_s \end{cases}$$

今 $\mathfrak{L}_n$ ガ分解不可能デアルトスル。然ルトキニハ，$\mathfrak{L}_n = L$ トオケバ，

$$\delta(L) \geqq \eta(\mathfrak{L}_{n-1}) \geqq \eta(\mathfrak{L}_{n-2}) \geqq \cdots\cdots \geqq \eta(\mathfrak{L}_0) = \eta(\mathfrak{L})$$

トナリ、補助定理6ハ成立スル。

次ニ，$\mathfrak{L}_n$ ガ分解可能ナリトスル。$\eta(\mathfrak{L}_n)$ ノ定義カラシテ、$\mathfrak{L}_n$ ノ適當ナ分解 $\mathfrak{L}_n=\prod_{l=1}^{d}\mathfrak{L}_{n,l}$ ヲトレバ，$l=1, 2,\cdots\cdots, d$ ニ對シテ、$\delta(\mathfrak{L}_{n,l}) \leqq \eta(\mathfrak{L}_n)+\varepsilon_{n+1}$ トナリ、尚モアル l_0 ニ対シテハ，$\delta(\mathfrak{L}_{n,l_0}) \geqq \eta(\mathfrak{L}_n)$ トナルヤウナ $\mathfrak{L}_n$ ノ分割ガアル。カヽル分解ニ依ッテ $\mathfrak{L}_{n+1}=\mathfrak{L}_{n,l_0}$ ト定義スレバ，(26) ナル関係ハ $s=n+1$ ニ對シテモ成立ツ。$\mathfrak{L}_{n+1}$ ガ分解不可能デアレバ，上述ノ如クシテ済ムシ，然ラザルトキニハ，$s=n+2$ ニ対シテモ(26)ガ成立ツ様ナ $\mathfrak{L}_{n+1}$ ガアル。

依ッテ結局、スベテノ自然数 s ニ對シテ (26) ナル関係ノ成立スルヤウナ確率法則ノ無限系列 $\{\mathfrak{L}_n\}$ ノ存在ヲ假定シテ、コノ場合ニモ補助定理6ノ成立ヲ示セバヨイ。

$\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_n = \mathfrak{L}'_n$ ト置ク．各 $\mathfrak{L}'_n$ ハ $\mathfrak{L}'_{n+1}$ ノ分解因子デアル．$\delta(\mathfrak{L}'_n)$ ハ從ッテ、n ト共ニ増加スル（平均散

縮度増加ノ原理，§2）シカシ $\delta(\mathfrak{L})$ ヲ越ヘナイ．故ニ $\lim \delta(\mathfrak{L}'_n) \leqq \delta(\mathfrak{L}) < \infty$．従ッテ、$\{\mathfrak{L}'_n\}$ ハアル確率法則ヘ quasi-convergence ヲナス。従ッテ $\{\mathfrak{L}_n\}$ モ亦然リ、$\{\mathfrak{L}_n\}$ ノ極限法則ヲLデ表ハサウ。

一方，$\{\mathfrak{L}_n\}$ ノ定義カラ、$\{\eta(\mathfrak{L}_n)\}$，$\{\delta(\mathfrak{L}_n)\}$ ハ夫々，單調非減少、單調非増加デ同ジ極限値ヲモツ。ソコデ

$$\eta(\mathfrak{L}_n) \leqq \eta(L) \leqq \delta(L) < \delta(\mathfrak{L}_n) \tag{27}$$

ガアル所カラサキノスベテノ n ニツイテ成立スレバ，$\eta(L) = \delta(L)$ トナル。又 L ガ $\mathfrak{L}$ ノ分解因子デアルコトハ明カデアリ、又 $\eta(\mathfrak{L}) = \eta(\mathfrak{L}_0) \leqq \eta(\mathfrak{L}_n) \leqq \eta(L)$ ニ依ッテ $\eta(\mathfrak{L}) \leqq \delta(L)$ トナルカラ、補助定理6ハ証明サレタコトニナル。

ソコデ，(27) ヲ示サウ。$\eta(L) \leqq \delta(L) < \delta(\mathfrak{L}_n)$ ハスベテノ n ニ對シテ成立ツ。$\eta(\mathfrak{L}_n) > \eta(L)$ トナル様ナ n_0 ガアルト假定シテ矛盾ニ導カウ。$\{\eta(\mathfrak{L}_n)\}$ ハ單調非減少ダカラ、$n \geqq n_0$ ナルスベテノ n ニツイテ $\eta(\mathfrak{L}_n) > \eta(L)$ トナル。サテ一方デ、$\delta(\mathfrak{L}_n/L)$ ガ $n \longrightarrow \infty$ ノトキ0ニナルコトカラ、充分大ナルスベテノ n ニツイテ $\delta(\mathfrak{L}_n/L) < \eta(\mathfrak{L}_n)$ トナル。

従ッテ、$\mathfrak{L}_n = L \cdot \frac{\mathfrak{L}_n}{L}$ ト書クトキ，$\eta(L)$ モ $\delta(\mathfrak{L}_n/L)$ モ共ニ $\eta(\mathfrak{L}_n)$ ヨリ小トナル。コレハ矛盾デアル。（$\delta(\mathfrak{L}_n/L) < \eta(\mathfrak{L}_n)$ ナコトカラ $\eta(L) \geqq \eta(\mathfrak{L}_n)$ トナラネバナラヌ。）〔証終〕

§6.3. <u>定理1ノ証明</u>: 今 $\mathfrak{L}$ ガ無限ニ分解可能

ナラバ，ソレデヨイ。然ラザルトキニハ，$\eta(\mathfrak{L})>0$ デアル（(25)，(α)）。従ッテ補助定理6ニヨッテ $\mathfrak{L}$ ノ素因子ガ少クモ一ツ存在スル。即チ $\zeta(\mathfrak{L})>0$ トナラネバナラヌ。（§6，ノ〔1〕参照）従ッテ $\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n \downarrow 0$ ヲ任意ニ與ヘタトシテ、次ノ如キ分解不可能ナ確率法則列 $\{L_n\}$ ヲ定義スルコトガ出來ル。

(i) L_1 ハ $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0''$ ノ素因子デシカモ $\delta(L_1)>\zeta(\mathfrak{L})-\varepsilon_1$ トシ，且ツ $\mathfrak{L}=L_1\mathfrak{L}_1''$ トスル。

(ii) L_2 ハ $\mathfrak{L}_1''$ ノ素因子デ、シカモ $\delta(L_2)>\zeta(\mathfrak{L}_1'')-\varepsilon_2$ トシ，且ツ $\mathfrak{L}_1''=L_2\mathfrak{L}_2''$ トスル。

以下斯クノ如クシテ $\{L_n\}$ $\{\mathfrak{L}_n''\}$ ヲ定義スル。

若シ，コノ *process* ニシテ、無限ニ分解可能ナ $\mathfrak{L}_n''$ ニ到達シタナラバ，$\mathfrak{L}=L_1 L_2 \cdots\cdots L_n \mathfrak{L}_n''$ ト書ケテ、コレデ定理ハ証明サレタ。

然ラザルトキニハ，無限系列 $\{L_n\}$，$\{\mathfrak{L}_n''\}$ ヲ得ル。コノトキ明カニ $\prod_{n=1}^{\infty} L_n$ ハ *quasi-convergent* デアル。コレヲ $\mathfrak{L}'=\prod_{n=1}^{\infty} L_n$ トオク。

---

(3) 補助定理6ニ依ッテ $\mathfrak{L}$ ノ素因子ノ存在ヲ知レ。（更ニ委シクハ，$\delta(L)\geqq\eta(\mathfrak{L})$ トナル素因子 L ノ存在モワカル訳デアルガコノ事ハ用本<u>ナイ</u>）．従ッテ $\zeta(\mathfrak{L})>0$ デアル。然ルニ (22) ノ定義カラ $\varepsilon>0$ ヲ如何ニ與ヘテモ $\zeta(\mathfrak{L})-\varepsilon$ ヨリ大ナル平均散幅度ヲモツ素因子ガアルワケデアル。

然ル時ニハ $\mathcal{L}=\mathcal{L}'\mathcal{L}''$ ト書カレル。

茲ニ $\mathcal{L}''$ ハ無限ニ分解可能デアル，何者 $\prod L_n$ ハ *quasi-convergent* デアルカラ、$\delta(L_n)\to 0$ デアリ、他方、定義ニヨリ $\varsigma(\mathcal{L}'_n)<\delta(L_{n+1})+\varepsilon'_{n+1}$ デアル。今假リニ $\mathcal{L}'$ ガ無限ニ分解可能ナ確率法則デナイトスルト $\mathcal{L}''$ ハ素因子 L'' ヲモツ。（無論 L'' ハ單位法則デナイトシテ）L'' ハ各 $\mathcal{L}''_n$ ノ素因子デモアルカラ、$\delta(L'')\leqq\varsigma(\mathcal{L}''_n)$. 故ニ、$\delta(L'')=0$、從ツテ L'' ハ單位法則タラザルヲ得ナイ、コレハ矛盾。

§7.〔挿記〕 定理1ニ關スル Khintchine ノ證明ノ概要： Lévy ノ證明ニ於テ、吾々ハ平均散縮度 $\delta(\mathcal{L})$ ノ有效ナコトガ見ラレルノデアルガ，特性函數ヲ主ナル道具トスル Khintchine ノ證明デハ，コレニ代ルトギモノトシテ $\mathcal{L}$ ノ分布函數ヲ $F(x)$，特性函數ヲ $f(t)$ トスルトキ

$$(29)\quad N_a(\mathcal{L})\equiv N_a(f)\equiv -\int_0^a \log|f(t)|\,dt$$
$$\equiv -\int_0^a \log\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)\right|dt$$

ヲバ考ヘルノデアル。但シ，$f(0)=1$ デ且ツ $f(t)$ ハ連續ナコトカラ、$0\leqq t\leqq a$ デハ $f(t)\neq 0$ ナルヤウニ a ヲトツテアルトスル。同樣ノ注意ハ一々ニ以下述ベナイ。

$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ トスルト，$N_a(\mathcal{L})=N_a(\mathcal{L}_1)+N_a(\mathcal{L}_2)$ トナル。（何者 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$ ダカラ） 從ツテ N_a ハ non-positive ナコトカラ、$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ ナラ

バ，$Na(\mathcal{L}_i) \geqq Na(\mathcal{L})$ $(i=1,2)$ トナル。

然ラバ、コノ等式ノ成立スルノハ何時カト云フ問題ガ起ルノデアルガ、之レハ，次ノ補助定理カラ、ソノ解答ガ得ラレル。

"<u>補助定理</u>. 分布函数列 $F_n(x)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ，スベテノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $F_n(-\varepsilon)\leqq \frac{1}{2}$，$F_n(\varepsilon)\geqq\frac{1}{2}$ ナリトスル。ソノ特性函数列 $\{f_n(t)\}$ ガ、或ル $a>0$ ニ對シテ $Na(f_n)\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$ ナルトキニハ，$f_n(t)\to 1$ (スベテノ t ニ對シテ) トナル。"

或ル a ニ對シテ $Na(f)=0$ ガ成立スルナラバ，$f(t)$ ノ分布函数ヲ $F(x)$ トスルトキ適當ナ常数 α ヲトツテ $F(x+\alpha)=F_n(x)$ トシテ上ノ補助定理ノ條件ヲ滿足スル樣ニ出來ルカラ、$f_n(t)=e^{-i\alpha t}f(t)=1$ $(-\infty<t<\infty)$ トナルコトガ上カラ得ラレル。從ツテ，

「$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ トスルト，$Na(\mathcal{L}_i)\geqq Na(\mathcal{L})$ $(i=1,2)$ 但シ一般ニハ不等式ガ成立スルノデアツテ、例ヘバ $Na(\mathcal{L}_1)=Na(\mathcal{L})$ トナルノハ $Na(\mathcal{L}_2)=0$ 即チ $|f(t)|=1$ $(0\leqq t\leqq a)$ 即チ $f(t)=e^{-i\alpha t}$ $(-\infty<t<\infty)$ 即チ $\mathcal{L}_2$ ガ單位法則ニナルトキニ限ル」

コノ性質ハ，$\delta(\mathcal{L})$ ノ性質ニ對比スベキモノデアル。シカモ $Na(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)=Na(\mathcal{L}_1)+Na(\mathcal{L}_2)$ ナル關係サヘアリ、特性函数トノ關係モ明瞭デアル。

Khintchine ノ証明ハ，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ ト分解シ，$\mathcal{L}_1$ ハ分解不可能ナ確率法則ノ積，$\mathcal{L}_2$ ハ素因子ヲ有シナ

イ確率法則デアル様ニ出来ルコトヲ先ヅ示シ，次ニ素因子ヲ有シナイ確率法則ハ無限ニ分解可能ナコトヲ示ス事ニ依ッテ証明ヲ完成シタノデアル。ソノ全体ヲ通ジテ基調ヲナスモノハ，上述ノNa($\mathcal{L}$)ノ利用デアル。